

**Câu 1. (1.5 điểm)**

- a) Tìm điều kiện của  $x$  để biểu thức  $A = \sqrt{x-3}$  có nghĩa.
- b) Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức  $B = \sqrt{2}(\sqrt{8} - \sqrt{3}) + \sqrt{6}$
- c) Rút gọn biểu thức  $C = \frac{x}{\sqrt{x+x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$  với  $x > 0$  và  $x \neq 1$

**Câu 2. (1.5 điểm)**

- a) Không sử dụng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình  $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=10 \end{cases}$
- b) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng  $(d): y = 2mx - 1$ . Tìm  $m$  để đường thẳng  $(d)$  đi qua điểm  $A(1;2)$

**Câu 3. (1.0 điểm)** Hướng ứng chiến dịch tình nguyện “Mùa hè xanh” để giúp học sinh vùng cao đến trường thuận lợi hơn, hai tổ thanh niên A và B tham gia sửa một đoạn đường. Nếu hai tổ cùng làm thì trong 8 giờ xong việc. Nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của tổ A ít hơn tổ B là 12 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi tổ sửa xong đoạn đường đó trong bao lâu?

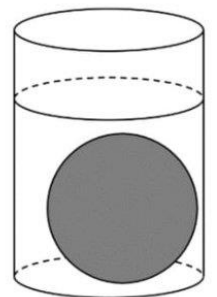
**Câu 4. (2.0 điểm)** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$  (1) (với  $x$  là ẩn số)

- a) Giải phương trình (1) khi  $m = 0$
- b) Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình (1) có nghiệm
- c) Tìm giá trị của  $m$  để phương trình (1) có nghiệm  $x_1; x_2$  sao cho biểu thức  $F = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 5. (3.0 điểm)** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn,  $AB < AC$  và nội tiếp đường tròn (O). Gọi BE, CF là các đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC.

- a) Chứng minh AEHF là tứ giác nội tiếp.
- b) Đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEHF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai I (A không trùng với I). Chứng minh hai tam giác IBC và IFE đồng dạng với nhau.
- c) Hai đường thẳng BC và EF cắt nhau tại K. Chứng minh ba điểm A, I, K thẳng hàng.

**Câu 6. (1.0 điểm)** Người ta nhấn chìm hoàn toàn một viên bi sắt đặc vào một cốc thủy tinh chứa nước có dạng hình trụ thì nước trong cốc dâng lên thêm 2cm và không tràn ra ngoài cốc (như hình vẽ bên). Biết đường kính đáy của cốc bằng 6cm (bỏ qua bề dày của thành cốc). Tính thể tích của viên bi.



----- Hết -----

Ghi chú: Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh : ..... Số báo danh .....  
Chữ ký của CBCT 1 : ..... Chữ ký của CBCT 2 .....

### LỜI GIẢI

#### Câu 1. (1.5 điểm)

a) Tìm điều kiện của  $x$  để biểu thức  $A = \sqrt{x-3}$  có nghĩa.

$$A = \sqrt{x-3} \text{ có nghĩa khi và chỉ khi } x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$$

Vậy với  $x \geq 3$  thì biểu thức  $A = \sqrt{x-3}$  có nghĩa.

b) Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức  $B = \sqrt{2}(\sqrt{8} - \sqrt{3}) + \sqrt{6}$

$$B = \sqrt{2}(\sqrt{8} - \sqrt{3}) + \sqrt{6} = \sqrt{2}(2\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{6} = 4 - \sqrt{6} + \sqrt{6} = 4$$

Vậy  $B = 4$

c) Rút gọn biểu thức  $C = \frac{x}{\sqrt{x}+x} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$  với  $x > 0$  và  $x \neq 1$

$$\text{Với } x > 0 \text{ và } x \neq 1 \text{ ta có } C = \frac{x}{\sqrt{x}+x} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = 1$$

Vậy  $C = 1$  với  $x > 0$  và  $x \neq 1$

#### Câu 2. (1.5 điểm)

a) Không sử dụng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình  $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=10 \end{cases}$

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ 3(1+2y)+y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2 \cdot 1=3 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình  $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=10 \end{cases}$  có tập nghiệm  $S = \{(3;1)\}$

b) Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $(d): y = 2mx - 1$ . Tìm  $m$  để đường thẳng  $(d)$  đi qua điểm  $A(1;2)$

Đường thẳng  $(d)$  đi qua điểm  $A(1;2)$  khi và chỉ khi  $2 = 2m \cdot 1 - 1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$

Vậy với  $m = \frac{3}{2}$  thì đường thẳng  $(d)$  đi qua điểm  $A(1;2)$

**Câu 3. (1.0 điểm)** Hướng ứng chiến dịch tình nguyện “Mùa hè xanh” để giúp học sinh vùng cao đến trường thuận lợi hơn, hai tổ thanh niên A và B tham gia sửa một đoạn đường. Nếu hai tổ cùng làm thì trong 8 giờ xong việc. Nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của tổ A ít hơn tổ B là 12 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi tổ sửa xong đoạn đường đó trong bao lâu?

Gọi  $x$  là thời gian (giờ) tổ thanh niên A sửa riêng hoàn thành một đoạn đường ( $x > 0$ )

Gọi  $y$  là thời gian (giờ) tổ thanh niên B sửa riêng hoàn thành một đoạn đường ( $y > 0$ )

Khi đó, trong một giờ tổ thanh niên A làm riêng sửa được  $\frac{1}{x}$  đoạn đường và trong một giờ tổ thanh niên

B làm riêng sửa được  $\frac{1}{y}$  đoạn đường

Vì nếu hai tổ cùng làm thì trong 8 giờ xong việc nên ta có phương trình  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$  (1)

Vì nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của tổ A ít hơn tổ B là 12 giờ nên ta có phương trình  $y - x = 12$  (2)

Từ (1)(2) ta có hệ phương trình 
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8} \\ y - x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{12+x} = \frac{1}{8} \\ y = 12+x \end{cases}$$

Giải  $\frac{1}{x} + \frac{1}{12+x} = \frac{1}{8}$  ta có:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{12+x} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{8(12+x)}{8x(12+x)} + \frac{8x}{8x(12+x)} = \frac{x(12+x)}{8x(12+x)}$

Suy ra  $8(12+x) + 8x = x(12+x) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 96 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 12 \end{cases} \Rightarrow x = 12$  vì  $(x > 0)$

Ta có  $x = 12 \Rightarrow y = 12 + 12 = 24$

Vậy thời gian tổ thanh niên A sửa riêng hoàn thành một đoạn đường là 12 giờ và thời gian tổ thanh niên B sửa riêng hoàn thành một đoạn đường là 24 giờ

**Câu 4. (2.0 điểm)** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$  (1) (với  $x$  là ẩn số)

a) Giải phương trình (1) khi  $m = 0$

Với  $m = 0$  phương trình (1) trở thành  $x^2 + 2x - 3 = 0$

Phương trình  $x^2 + 2x - 3 = 0$  có  $a + b + c = 1 + 2 + (-3) = 0$

Do đó phương trình (1) có nghiệm  $\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-3}{1} = -3 \end{cases}$

Vậy phương trình (1) có tập nghiệm  $S = \{1; -3\}$

b) Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình (1) có nghiệm

Phương trình (1) có  $\Delta' = [-(m-1)]^2 - 1 \cdot (m^2 - 3) = 4 - 2m$  với mọi giá trị của  $m$ .

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta' \geq 0$  hay  $4 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$

Vậy với  $m \leq 2$  thì phương trình (1) có nghiệm

c) Tìm giá trị của  $m$  để phương trình (1) có nghiệm  $x_1; x_2$  sao cho biểu thức  $F = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

Với  $m \leq 2$  áp dụng hệ thức Vi-et ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$

Ta có  $F = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + (x_1 + x_2)$   
 $= [2(m-1)]^2 - 2(m^2 - 3) + 2(m-1) = 2m^2 - 6m + 8 = \frac{1}{2}(2m-3)^2 + \frac{7}{2}$

Ta có  $F = \frac{1}{2}(2m-3)^2 + \frac{7}{2} \geq \frac{7}{2}$  với mọi  $m \leq 2$

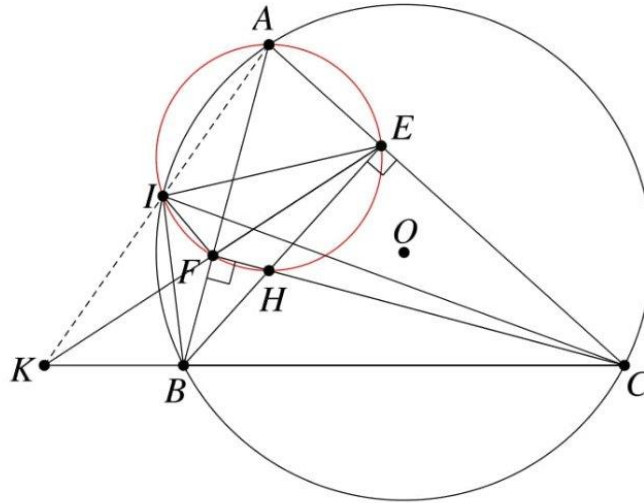
Biểu thức  $F$  có giá trị nhỏ nhất là  $\frac{7}{2}$  đạt được khi  $(2m-3)^2 = 0$  hay  $2m-3=0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$

Vậy với  $m = \frac{3}{2}$  thì phương trình (1) có nghiệm  $x_1; x_2$  sao cho biểu thức  $F = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

Bùi Đức Phương - Phan Sào Nam

**Câu 5. (3.0 điểm)** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn,  $AB < AC$  và nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $BE, CF$  là các đường cao và  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ .

a) Chứng minh  $AEHF$  là tứ giác nội tiếp.



Trong tam giác  $ABC$  có  $BE$  và  $CF$  là các đường cao cắt nhau tại  $H$

$$\Rightarrow BE \perp AC; CF \perp AB$$

$$\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AFB} = 90^\circ$$

$$\text{Hay } \widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$$

Trong tứ giác  $AEHF$  có

$$\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $AEHF$  là tứ giác nội tiếp đường tròn (Tổng hai góc đối trong một tứ giác bằng  $180^\circ$ )

b) Đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $AEHF$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai  $I$  ( $A$  không trùng với  $I$ ). Chứng minh hai tam giác  $IBC$  và  $IFE$  đồng dạng với nhau.

Vì  $E, F$  cùng nhìn  $AH$  dưới góc vuông

$\Rightarrow AEHF$  nội tiếp đường tròn đường kính  $AH$

Gọi tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $AEHF$  là  $O'$  ( $O'$  là trung điểm của  $AH$ )

Ta có  $(O')$  cắt  $(O)$  tại  $I \Rightarrow I \in (O)$  và  $I' \in (O')$

$\Rightarrow AIFE$  nội tiếp đường tròn  $(O')$

$\Rightarrow \widehat{IAF} = \widehat{IEF}$  (hai góc nội tiếp cùng chắn cung  $IF$ ) (1)

Và  $\widehat{IFE} + \widehat{IAE} = 180^\circ$  (2)

Do  $I \in (O)$  và  $I' \in (O')$  nên  $AIBC$  nội tiếp  $(O)$

$$\Leftrightarrow \widehat{IAB} = \widehat{ICB} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung IB) (3)}$$

$$\text{Và } \widehat{IBC} + \widehat{IAC} = 180^\circ \text{ (4)}$$

$$\text{Từ (1) và (3)} \Rightarrow \widehat{IEF} = \widehat{ICB} (= \widehat{IAB})$$

$$\text{Từ (2) và (4)} \Rightarrow \widehat{IFE} = \widehat{IBC} \text{ (cùng bù } \widehat{IAE} \text{)}$$

Xét  $\triangle IBC$  và  $\triangle IFE$  có:

$$\widehat{IEF} = \widehat{ICB} \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{IFE} = \widehat{IBC} \text{ (cmt)}$$

Vậy  $\triangle IBC$  đồng dạng  $\triangle IFE$  (g.g)

c) Hai đường thẳng  $BC$  và  $EF$  cắt nhau tại  $K$ . Chứng minh ba điểm  $A, I, K$  thẳng hàng.

$$\text{Tứ giác } IAEF \text{ nội tiếp} \Rightarrow \widehat{IFK} = \widehat{IAE}$$

$$\text{Tứ giác } IABC \text{ nội tiếp} \Rightarrow \widehat{IBK} = \widehat{IAE}$$

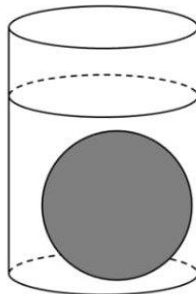
$$\text{Suy ra } \widehat{IFK} = \widehat{IBK} \text{ suy ra tứ giác } IFBK \text{ nội tiếp} \Rightarrow \widehat{KIF} + \widehat{KBF} = 180^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{KBF} = \widehat{FEC} = \widehat{FIA}$$

$$\text{Nên } \widehat{KIF} + \widehat{FIA} = 180^\circ$$

Vậy ba điểm  $A, I, K$  thẳng hàng.

**Câu 6. (1,0 điểm)** Người ta nhấn chìm hoàn toàn một viên bi sắt đặc vào một cốc thủy tinh chứa nước có dạng hình trụ thì nước trong cốc dâng lên thêm 2cm và không tràn ra ngoài cốc (như hình vẽ bên). Biết đường kính đáy của cốc bằng 6cm (bỏ qua bề dày của thành cốc). Tính thể tích của viên bi.



$$\text{Bán kính đáy của cốc là } \frac{6}{2} = 3 \text{ (cm)}$$

Vì viên bi sắt đặc được nhấn chìm hoàn toàn trong nước nên thể tích của lượng nước dâng lên chính là thể tích của viên bi và có giá trị:  $V = \pi 3^2 2 = 18\pi (\text{cm}^3)$

Vậy thể tích của viên bi là  $18\pi (\text{cm}^3)$

Bùi Đức Phương - Phan Sào Nam