

Câu 1: (1,5 điểm)

- a) Tìm giá trị của x sao cho biểu thức $A = x - 1$ có giá trị dương.
- b) Đưa thừa số ra ngoài dấu căn, tính giá trị biểu thức $B = 2\sqrt{2^2 \cdot 5} - 3\sqrt{3^2 \cdot 5} + 4\sqrt{4^2 \cdot 5}$
- c) Rút gọn biểu thức $C = \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a} \right)^2$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$.

Câu 2: (1,5 điểm)

- a) Không sử dụng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x - y = 7 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

b) Cho đường thẳng $d: y = ax + b$. Tìm giá trị của a và b sao cho đường thẳng d đi qua điểm $A(0; -1)$ và song song với đường thẳng $\Delta: y = x + 2019$.

Câu 3: (1,0 điểm) Hướng ứng Ngày Chủ nhật xanh do UBND tỉnh phát động với chủ đề “Hãy hành động để Thừa Thiên Huế thêm Xanh, Sạch, Sáng”, một trường THCS đã cử học sinh của hai lớp 9A và 9B cùng tham gia làm tổng vệ sinh một con đường, sau $\frac{35}{12}$ giờ thì làm xong công việc. Nếu làm riêng từng lớp thì thời gian học sinh lớp 9A làm xong công việc ít hơn thời gian học sinh lớp 9B là 2 giờ. Hỏi nếu mỗi lớp làm riêng thì sau bao nhiêu giờ sẽ làm xong công việc?

Câu 4: (2,0 điểm) Cho phương trình: $x^2 + 2(m - 2)x + m^2 - 4m = 0$ (1) (với x là ẩn số).

- a) Giải phương trình (1) khi $m = 1$.
- b) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .
- c) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$$\frac{3}{x_1} + x_2 = \frac{3}{x_2} + x_1.$$

Câu 5: (3,0 điểm) Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Trên đường tròn (O) lấy điểm C không trùng B sao cho $AC > BC$. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và tại C cắt nhau tại D . Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB , E là giao điểm của hai đường thẳng OD và AC .

- a) Chứng minh $OECH$ là tứ giác nội tiếp.
- b) Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng CD và AB . Chứng minh $\widehat{BCF} + \widehat{CFB} = 90^\circ$.
- c) Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng BD và CH . Chứng minh hai đường thẳng EM và AB song song với nhau.

Câu 6: (1,0 điểm) Một chiếc cốc thủy tinh có dạng hình trụ chứa đầy nước, có chiều cao bằng 6cm , bán kính đáy bằng 1cm . Người ta thả từ từ lần lượt vào cốc nước một viên bi hình cầu và một vật có dạng hình nón đều bằng thủy tinh (vừa khít như hình vẽ) thì thấy nước trong chiếc cốc tràn ra ngoài. Tính thể tích của lượng nước còn lại trong chiếc cốc (biết rằng đường kính của viên bi, đường kính của đáy hình nón và đường kính của đáy cốc nước xem như bằng nhau; bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh).

.....Hết.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

ĐÁP ÁN

Câu 1: (1,5 điểm)

a) $A = x - 1$

Ta có A có giá trị dương $\Leftrightarrow A > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Vậy $x > 1$ thì A có giá trị dương

b) $B = 2\sqrt{2^2 \cdot 5} - 3\sqrt{3^2 \cdot 5} + 4\sqrt{4^2 \cdot 5}$
 $= 2\sqrt{2^2 \cdot 5} - 3\sqrt{3^2 \cdot 5} + 4\sqrt{4^2 \cdot 5} = 2 \cdot 2\sqrt{5} - 3 \cdot 3\sqrt{5} + 4 \cdot 4\sqrt{5}$
 $= 4\sqrt{5} - 9\sqrt{5} + 16\sqrt{5} = 11\sqrt{5}$

Vậy $B = 11\sqrt{5}$

c)

ĐKXD: $a \geq 0; a \neq 1$

$$C = \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a} \right)^2 = \left[\frac{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a} + a)}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right] \cdot \left[\frac{1 - \sqrt{a}}{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a})} \right]^2$$
$$= (1 + \sqrt{a} + a + \sqrt{a}) \cdot \left(\frac{1}{1 + \sqrt{a}} \right)^2 = (1 + 2\sqrt{a} + a) \cdot \left(\frac{1}{1 + \sqrt{a}} \right)^2$$
$$= (1 + \sqrt{a})^2 \cdot \left(\frac{1}{1 + \sqrt{a}} \right)^2 = 1$$

Vậy với $a \geq 0; a \neq 1$ thì $B = 1$

Câu 2: (1,5 điểm)

a) $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 3y = 21 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x = 26 \\ y = 4x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \cdot 2 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $(x; y) = (2; 1)$

b) Ta có $d // \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b \neq 2019 \end{cases}$

$\Rightarrow d: y = x + b (b \neq 2019)$

Đường thẳng $d: y = x + b (b \neq 2019)$ đi qua điểm $A(0; -1)$ nên thay $x = 0; y = -1$ vào phương trình đường thẳng d ta được $-1 = 0 + b \Leftrightarrow b = -1$ (TM)

Vậy $a = 1; b = -1$

Câu 3: (1,0 điểm)

Gọi thời gian lớp 9A làm một mình xong công việc là x (giờ) $\left(x > \frac{35}{12} \right)$

Gọi thời gian lớp 9B làm một mình xong công việc là y (giờ) $(y > 2)$

Mỗi giờ lớp 9A làm được phần công việc là: $\frac{1}{x}$ (công việc)

Mỗi giờ lớp 9B làm được phần công việc là: $\frac{1}{y}$ (công việc)

Mỗi giờ lớp cả hai ớp 9A, 9B làm được phần công việc là: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (công việc)

Theo đề bài, hai lớp cùng làm chung công việc trong $\frac{35}{12}$ giờ thì xong công việc nên ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 : \frac{35}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{12}{35} \quad (1)$$

Nếu làm riêng từng lớp thì thời gian học sinh lớp 9A làm xong công việc ít hơn thời gian lớp 9B là 2 giờ nên ta có phương trình: $y = x + 2$ (2)

Thế phương trình (2) vào phương trình (1) ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{35} \Leftrightarrow 35(x+2) + 35x = 12x(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 35x + 70 + 35x = 12x^2 + 24x$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 - 46x - 70 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 - 60x + 14x - 70 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x(x-5) + 14(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(12x+14) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ 12x+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \text{ (tm)} \\ x=-\frac{7}{6} \text{ (Ktm)} \end{cases}$$

Vậy nếu làm một mình thì lớp 9A làm xong công việc trong 5 giờ, lớp 9B làm xong công việc trong $5+2=7$ giờ

Câu 4: (2,0 điểm)

Phương trình: $x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 4m = 0$ (1)

Thay $m=1$ vào phương trình (1) ta được phương trình:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) + (x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

Vậy với $m=1$ thì tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-1; 3\}$

b) $x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 4m = 0$ (1)

$$\text{CÓ } \Delta' = (m-2)^2 - m^2 + 4m = m^2 - 4m + 4 - m^2 + 4m = 4 > 0 \quad \forall m$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

c) Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m .

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m-2) = -2m + 4 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 4m \end{cases}$$

Phương trình có hai nghiệm $x_1 \neq 0; x_2 \neq 0$ khi $x_1 x_2 \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ và $m \neq 4$

Theo đề bài ta có:
$$\frac{3}{x_1} + x_2 = \frac{3}{x_2} + x_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x_1} - \frac{3}{x_2} - x_1 + x_2 = 0 \quad (x_1 x_2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0; m \neq 4)$$

$$\Leftrightarrow 3 \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) + (x_2 - x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \right) + (x_2 - x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1) \left(\frac{3}{x_1 x_2} + 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x_1 x_2} + 1 = 0 \quad (\text{Do } x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{m^2 - 4m} + 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m - m + 3 = 0 \Leftrightarrow m(m-3) - (m-3)$$

$$\Leftrightarrow (m-3)(m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3(tm) \\ m = 1(tm) \end{cases}$$

Vậy $m = 1; m = 3$ là các giá trị thỏa mãn bài toán.

Câu 5: (3,0 điểm)

a)

$DC = DA$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$OA = OC$ (bán kính)

Do đó OD là đường trung trực của đoạn thẳng AC

$\Rightarrow OD \perp AC$

Tứ giác OECH có $\widehat{CEO} + \widehat{CHO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

\Rightarrow Tứ giác OECH là tứ giác nội tiếp.

b) Xét (O) có: $\widehat{BCF} = \widehat{BAC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BC)

(1)

$$\widehat{HCB} = \widehat{BAC} \text{ (Cùng phụ } \widehat{CBA} \text{)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BCF} = \widehat{HCB} \Rightarrow CB$ là tia phân giác của \widehat{HCF} (*)

$$\Rightarrow \widehat{HCF} = 2 \cdot \widehat{BCF}$$

ΔCHF vuông tại H nên $\widehat{HCF} + \widehat{CFB} = 90^\circ$ hay $2 \cdot \widehat{BCF} + \widehat{CFB} = 90^\circ$

c) Gọi K là giao điểm của DB và AC.

Xét (O) ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{ACD}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn \widehat{AC})

(3)

Ta có ΔACH vuông tại H có $\widehat{ACH} = 90^\circ - \widehat{CAH}$

ΔABC vuông tại C có $\widehat{CBA} = 90^\circ - \widehat{CAB}$

$$\Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{ABC} \text{ (Cùng phụ } \widehat{CAH} \text{)} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{ACH} = \widehat{ACD}$

$\Rightarrow CA$ là tia phân giác trong của tam giác ΔBCD (**)

Theo tính chất tia phân giác trong ΔBCD ta có:

$$\frac{KM}{KD} = \frac{BM}{BD} = \frac{CM}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{KM}{KD} = \frac{BM}{BD} = \frac{CM}{AD} \text{ (Do } DC = DA \text{)}$$

Mặt khác ta có: $CH \parallel AD$ (cùng vuông góc AB)

$$\Rightarrow \frac{HM}{AD} = \frac{BM}{BD} \text{ (Định lý Ta lét)}$$

$$\Rightarrow \frac{HM}{AD} = \frac{BM}{BD} = \frac{CM}{AD}$$

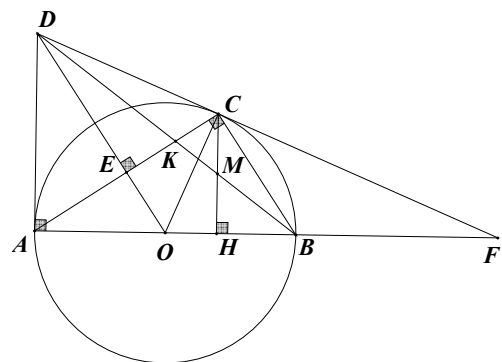
$$\Rightarrow \frac{HM}{AD} = \frac{CM}{AD}$$

$$\Rightarrow HM = CM$$

Mà $CE = AE$ (Do OD là đường trung trực của AB) nên ME là đường trung bình của ΔCAH

$\Rightarrow ME \parallel AH$ hay $ME \parallel AB$

Câu 6: (1,0 điểm)



Chiều cao hình trụ là: $h_t = 6(cm)$

Thể tích hình trụ là: $V_t = \pi \cdot 1^2 \cdot 6 = 6\pi (cm^3)$

Bán kính hình cầu và hình trụ là: $r = 1(cm)$

Thể tích hình cầu là: $V_c = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3} \pi (cm^3)$

Chiều cao hình nón là: $h = h_t - 2r = 6 - 2 \cdot 1 = 4(cm)$

Thể tích hình nón là: $V_n = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h_n = \frac{1}{3} \pi \cdot 1^2 \cdot 4 = \frac{4}{3} \pi (cm^3)$

Thể tích lượng nước còn trong chiếc cốc là:

$$V = V_t - V_n - V_c = 6\pi - \frac{4}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi = \frac{10}{3}\pi (cm^3)$$